Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 10

Abgabe: Freitag, den 19. Januar 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe (*4 Punkte*)

Es seien $m, r \in \mathbb{N}$, V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension m und W ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum. Weiter seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Zeigen Sie: Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit

$$f(v_j) = w_j \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I“ online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Hinweis: Ziel von Aufgabe 10.1 ist es, einen alternativen Beweis zur Eindeutigkeit der r.Z.S.F. einer Matrix zu geben, siehe auch Aufgabe 7.4(a). Sie dürfen daher die Aussagen von Aufgabe 7.4 in Aufgabe 10.1 **nicht verwenden**.

Aufgabe 10.1 (*3+3 Punkte*)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(a) Seien $A, B \in M_{m\times n}(K)$ in r.Z.S.F, so dass A und B denselben Zeilenraum haben. Zeigen Sie, dass $A = B$ gilt.

(b) Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Matrix $F \in M_{m\times n}(K)$ in r.Z.S.F. existiert, so dass A zeilenäquivalent zu F ist.

Aufgabe 10.2 (*3+3 Punkte*)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(a) Ziel ist es, die Umkehrung von Satz 16.3 zu beweisen. Seien daher $A, B \in M_{m\times n}(K)$, so dass A und B denselben Zeilenraum haben. Zeigen Sie, dass A und B zeilenäquivalent sind.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 10.1 sowie die Sätze 16.3 und 16.4 aus der Vorlesung.

(b) Seien $A, B \in M_{m\times n}(K)$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
  (1) A und B sind zeilenäquivalent.
  (2) A und B haben denselben Zeilenraum.
  (3) Es existiert eine invertierbare Matrix $P \in M_{m\times m}(K)$ so, dass $B = PA$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (*4 Bonuspunkte*)

In der Vorlesung folgern wir aus dem Dimensionssatz, dass eine lineare Abbildung zwischen zwei n-dimensionalen K-Vektorräumen genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist. Widerlegen Sie diese Aussage für unendlich-dimensionale Vektorräume. Beweisen Sie hierzu, dass die Abbildung

$$\varphi\colon K[X] \longrightarrow K[X], \quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto f' := \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i$$

für jeden Körper K der Charakteristik 0 eine lineare, surjektive und **nicht** injektive Abbildung ist.

Zeigen sie ferner, dass φ für jeden Körper K der Charakteristik ungleich 0 nicht surjektiv ist.